**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОЙ УПАКОВКИ**

**C УЧЕТОМ ЗОН ЗАПРЕТА**

В докладе описывается постановка и метод решения следующей задачи равновесной упаковки. Рассмотрим в пространстве  шар  радиуса  с центром в точке  и совокупность  шаров , радиусы  и массы  которых заданы. Упаковку шаров  в шаре назовем равновесной, если центр тяжести семейства шаров совпадает с центром шара  Положение шаров  в пространстве задается параметрами размещения , , совпадающими с координатами их центров в . Зафиксируем параметры размещения  шаров , . Требуется найти такие параметры размещения , которые обеспечивают равновесную упаковку шаров   в шаре  минимального радиуса . Нетрудно видеть, что такая задача может рассматриваться как задача равновесной упаковки при наличии зон запрета.

Математическая постановка задачи имеет вид

 (1)

при ограничениях

, , (2) ,  (3)

, , , (4)

, , , (5)



. (6)

Условия (2) и (3) описывают принадлежность шару  областей запрета  и размещаемых шаров . Условия (4) и (5) задают условия попарного непересечения размещаемых шаров между собой и с областями запрета. Равенства (6) описывают условия равновесной упаковки.

Таким образом, имеем задачу математического программирования с  переменными ,, . В приведенной постановке радиусы  и массы  шаров являются константами. Зафиксируем , ,  и, не теряя общности, положим, что радиусы упорядочены по возрастанию.

В соответствии с методом расширения пространства [1] ослабим ограничения на радиусы шаров и будем считать их независимыми переменными. Построим такой интерполяционный полином  (в общем случае *(n-1)-*ой степени), что для пар точек  будут выполняться условия

. (7)

Сформируем систему ограничений

 (8)

 (9)

, (10)

где .

Система уравнений и неравенств (7)-(10) описывает множество всевозможных перестановок из чисел . Таким образом, метод искусственного расширения пространства позволил сформировать задачу (1)-(10) в пространстве переменных ,

Существенным достоинством формализации задачи равновесной упаковки шаров в виде (1) - (10) является тот факт, что задача является квадратичной. Однако количество линейных ограничений в системе (8), (9) равно . Поэтому реализация классических методов нелинейной оптимизации ограничивается размерностью задачи. Вместе с тем учет свойств линейных и квадратичных функций на комбинаторных многогранниках позволяет в ряде случаев обходить возникающие трудности [2].

Задачи равновесной упаковки имеет широкое практическое приложение и достаточно широко исследуются в современной литературе [3,4]. Заметим, что использование радиусов как независимых переменных в рамках иного концептуального подхода к решению некоторых классов задач упаковки рассмотрены в [5] и подтвердили перспективность указанного направления.

* + - * 1. **Yakovlev S.V***.* Тhe method of artificial space dilation in problems of optimal packing of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – **53**(5). – P. 725-732.
        2. **Pichugina O.S., Yakovlev S.V.** Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization // Cybernetics and Systems Analysis. - 2016. - **52**(6). - P. 921–930.
        3. **Fasano G.** Optimized Packings and Their Applications / G. Fasano, J. D. Pintér (Eds.). – Springer Opt. and its Appl. **105**, 2015.
        4. **Stetsyuk P.I., Romanova T.E., Scheithauer G.** On the global minimum in a balanced circular packing problem // Optimization Letters. – 2015. – 10 (6). – P. 1347–1360.
        5. **Stoyan Yu.G., Scheithauer G., Yaskov G.N.** Packing Unequal Spheres into Various Containers // Cybernetics and Systems Analysis.- 2016. - 52(3). –P. 419–426.